

## Formułowanie problemu decyzyjnego (optymalizacja produkcji, model diety i problem rozkroju). Metoda graficzna

Ogólna postać liniowego zadania decyzyjnego (dwa sposoby zapisu):

$$(1) \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min) \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max(\min)$$

$$(2a) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (\text{dla } i = 1, \dots, k)$$

$$(2b) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (\text{dla } i = k+1, \dots, k+p)$$

$$(2c) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \text{lub} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (\text{dla } i = k+p+1, \dots, r)$$

$$(3) \quad x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{lub} \quad x_j \geq 0 \quad (\text{dla } j = 1, \dots, n)$$

Wyjaśnienia:

(1) to kryterium optymalności i nosi nazwę funkcji celu zadania decyzyjnego

(2a) - (2c) to tzw. warunki ograniczające wyznaczające zbiór decyzji dopuszczalnych

(3) to warunek nieujemności zmiennych decyzyjnych

$x_1, x_2, \dots, x_n$  zmienne decyzyjne

$a_{ij}, b_i, c_j$  parametry zadania

$[a_{ij}] = A$  nosi nazwę macierzy zadania PL

$b_i$  to wyrazy wolne ograniczeń

$c_j$  to wagi funkcji celu

Każdy wektor  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  spełniający warunki (2) i (3) zadania decyzyjnego nosi nazwę rozwiązania dopuszczalnego tego zadania.

Wektor dopuszczalny  $x^o = (x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$ , dla którego funkcja celu zadania osiąga

swą największą (lub najmniejszą) wartość nosi nazwę rozwiązania optymalnego.

### [1] optymalizacja produkcji

**Zadanie 1.** Pewien warsztat może produkować trzy wyroby A, B i C zużywając przy tym m.in. cztery limitowane zasoby: drewno, stal, pracę i energię elektryczną. Zużycie jednostkowe tych zasobów i ich miesięczne limity, oraz ceny gotowych wyrobów przedstawia tabela:

Zasób	Limit	Nakłady jednostkowe		
		Wyrób A	Wyrób B	Wyrób C
drewno (m <sup>3</sup> )	240	3	4	1
stal (kg)	280	1	3	2
praca	800	2	4	5
energia	700	4	3	3
cena (zł)	-	60	40	30

Zakład zainteresowany jest maksymalizacją przychodu ze sprzedaży wytworzonych wyrobów.

Sformułuj zadanie programowania liniowego, które musi rozwiązać właściciel warsztatu, by ustalić optymalny plan swej miesięcznej produkcji.

**Zadanie 2.** Przedsiębiorstwo wytwarza dwa produkty: P1 i P2, wykorzystując w tym celu surowce S1 i S2, których zasoby wynoszą odpowiednio 10 jednostek i 36 j. Do produkcji wyrobu P1 zużywa się 2 j. S1 oraz 2 j. S2, a do produkcji P2 – 1 j. S1 i 4 j. S2. Zysk ze sprzedanej jednostki P1 wynosi 10 tys. zł, a ze sprzedanej jednostki P2 – 40 tys. zł. Przedsiębiorstwo podpisało kontrakt na dostawę jednostki P2 i trzech jednostek P1 i musi się z niego wywiązać. Ułóż model liniowego zadania decyzyjnego dla powyższego problemu, przyjmując, że przedsiębiorstwo chce maksymalizować zysk.

**Zadanie 3.** Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby W1 i W2. Należy zaplanować produkcję przedsiębiorstwa w pewnym tygodniu w taki sposób, aby osiągnięty zysk był maksymalny, jeśli wiadomo, że produkcja wyrobów W1 i W2 jest limitowana ograniczonymi zasobami 3 środków produkcji: S1, S2, S3. Zasoby tych środków wynoszą odpowiednio: 18, 20, 24 jednostki. Nakład środka S1 potrzebny do wyprodukowania jednostki wyrobu W1 wynosi 3 jednostki, a na wytworzenie jednostki produktu W2 wynosi jednostkę. Nakłady środka S2 wynoszą odpowiednio: 1 i 2 jednostki, natomiast środka S3: 3 i 2 jednostki. Zysk uzyskany z produkcji jednostki wyrobu W1 wynosi 2 jednostki pieniężne, a z wytworzenia jednostki wyrobu W2 wynosi 3 jednostki pieniężne.

Środki produkcji	Nakłady jednostkowe		Zasoby środków produkcji
	W1	W2	
S1	3	1	18
S2	1	2	20
S3	3	2	24
Zyski jednostkowe	2	3	

**Zadanie 4.** Zakład produkuje dwa wyroby A i B, które w procesie zużywają dwa podstawowe surowce P i Q. Przychód ze sprzedaży wyrobów A i B wynosi odpowiednio 5 i 8 zł, natomiast koszty jednostkowe to 3 i 5 zł. Do wyprodukowania wyrobu A potrzeba odpowiednio 3 j. surowca P i 8 j. surowca Q, natomiast w przypadku wyrobu B zużycie to wynosi odpowiednio 4 i 6 j. W magazynie dobowy zapas obu surowców wynosi dla P 24 j, natomiast dla Q jest 48 j. Sformułuj zadanie pozwalające określić strukturę produkcji wyrobów A i B, jeżeli kryterium optymalizacji będzie maksymalizacja zysku zakładu?

**Zadanie 5.** Pewien zakład krawiecki specjalizuje się w szyciu spodni i sukienek damskich. Przy szyciu spodni i sukienek zakład wykorzystuje dwa „zasoby”: materiał oraz czas pracy krawcowych.

Na wykonanie jednej pary spodni potrzebne są 3 m materiału oraz 2 roboczogodziny. Natomiast uszycie sukienki wymaga 2 m materiału oraz 8 roboczogodzin. Zakład może aktualnie wykorzystać 60 m materiału oraz 80 roboczogodzin. Ze sprzedaży uszytych wyrobów zakład otrzymuje odpowiednio 180 zł za spodnie oraz 320 zł za sukienkę. Sformułuj zadanie decyzyjne tak, aby plan produkcji dla tego zakładu krawieckiego, dla którego przychód ze sprzedaży uszytych spodni i sukienek będzie maksymalny.

**Zadanie 6.** Firma zamierza uruchomić produkcję wyrobów A i B. Wielkość produkcji jest limitowana przez możliwości przetworzenia na wyroby trzech surowców S1, S2 i S3. Nakłady surowców na wytworzenie jednostki wyrobu (kg/j.), możliwości przerobu surowców (w tonach) w okresie planistycznym oraz oczekiwane ceny zbytu (w zł/j.) podaje tabela. Firma maksymalizuje swój przychód. Sformułuj ten problem w postaci zadania programowania liniowego.

	Wyrób A	Wyrób B	Możliwości przerobu
S1	4	10	40
S2	8	4	24
S3	2	2	16
Cena zbytu	3	9	

**Zadanie 7.** W pewnym zakładzie (elektrownia, gazownia lub pogotowie ratunkowe) z powodów technologicznych konieczna jest stała obecność pracowników. Ze względu na zmienne natężenie realizowanego procesu liczba niezbędnych pracowników ulega zmianie. Można ją określić dla czterogodzinnych przedziałów czasu w czasie całej doby: godziny 0-4 – co najmniej 4 osoby, godziny 4-8 – co najmniej 18 osób, 8-12 – co najmniej 7, 12-16 – co najmniej 15, 16-20 – co najmniej 18, w przedziale 20-24 – co najmniej 6 osób.

Pracownicy przychodzą do pracy tylko o określonych godzinach (0, 4, 8, 12, 16 lub 20), a po przyjściu pozostają w pracy przez całą zmianę, która trwa równie 8 godzin.

Należy zbudować zadanie PL w celu uzyskania odpowiedzi na pytanie: jaka jest minimalna liczba pracowników niezbędnych do obsługi procesu produkcyjnego w ciągu doby?

### [2] model diety

**Zadanie 8.** Aby zdrowo wyglądać pies musi miesięcznie zjeść przynajmniej 100g składnika 1 (S1), 200g składnika 2 (S2) i nie więcej jak 300g składnika 3 (S3). Na rynku dostępne są dwie karmy, gdzie porcja karmy 1 (K1) zawiera 10g składnika 1, 1g składnika 2 i 10g składnika 3. Natomiast karma 2 (K2) zawiera 1g składnika 1, 10g składnika 2 i 10g składnika 3. Porcja karmy 1 (K1) kosztuje 5 zł, natomiast porcja karmy 2 (K2) 8zł. W jakich porcjach zmieszać karmy aby pies dostał składników ile potrzeba a koszt był jak najmniejszy.

### [3] problem rozkroju

**Zadanie 9.** Tartak wycina z belek długości 3m dwa rodzaje elementów: 1,4 m oraz 0,8 m. Klient złożył zamówienie na 5 elementów 1,4 m i 20 elementów 0,8 m. Tartak dąży do minimalizacji odpadu. Sformułuj ten problem w postaci zadania programowania liniowego.